

黏性液膜在水平旋转柱体外的稳态行为

林蕴芊, 雷家睿, 马宇翰

(北京师范大学 物理学系, 北京 100875)

摘要: 绕水平轴旋转的圆柱杆外表面上黏性液体会随着杆的旋转趋于稳态. 本文研究了这一稳态对应的最大液体质量及其在不同条件下丰富的几何形状. 在将液体流动近似视为斯托克斯流的前提下, 杆上液体的单位最大载荷量 W 关于液体参数 (密度 ρ 、黏度 μ) 及杆参数 (转速 Ω 、半径 a) 的依赖关系为 $W \propto \sqrt{\rho\mu\Omega a^3}$. 本文设计的控制变量实验表明, 这一关系在较小雷诺数情况下 ($Re \leq 10$) 成立. 在较高雷诺数 ($Re > 10$) 区域, 黏性液体的惯性效应是导致理论预测与实验结果出现偏差的主要原因. 本文进一步探究了液膜横截面形状随杆转速变化的现象, 实验观察到了椭圆、叶状、单勾和多勾形状的液膜, 并定性解释了其形成原因. 此外, 实验中还发现了圆柱体轴向上形成液环的现象, 液环数量与杆转速、杆半径成正相关.

关键词: 黏性液体; 液膜; 雷诺数;

中图分类号: O 357

文献标识码: A

文章编号: 1000-0712(2024)05-0055-05

【DOI】 10.16854/j.cnki.1000-0712.230270

本文探究的问题源于 2022 年国际青年物理学家锦标赛 (IYPT) 的一道题目: 当旋转一根涂有黏性液体的杆时, 原本在重力作用下会滴落的液体, 将在杆外部形成一层液膜而不会滴落. 这种现象在巧克力喷泉机的使用中经常出现, 在裹满巧克力浆的零食准备浸水冷却的过程中, 通常都会采取旋转竹签的方法来避免巧克力滴落.

这是一个典型的流体力学问题, 相关问题已经引起了不少的研究兴趣. 例如, Moffat 通过润滑理论和薄膜近似得出了给定转速下杆所能承受的单位最大载荷^[1]. Hansen 利用 Navier-Stokes 方程在 Stokes 近似下的迭代积分方程, 给出了一系列流动参数的自由表面剖面和自由表面速度分布^[2]. Peterson 使用有限元分析的方法得到了竖直重力场中绕水平轴旋转的杆表面的黏性液膜在稳态被破坏后的流场变化^[3]. 然而, Moffat 理论的适用范围还未有严格的实验检验. 同时, 据笔者所知, 还没有关于液膜截面的形状及可能产生的液体环数量变化的研究.

本文基于 Moffat 在 1977 年对该问题的研究^[1], 在实验上对旋转杆上液体的单位最大载荷量关于液体参数及环转速和半径的关系进行了定量检验. 实验结果表明, 低转速时理论与实验结果符合良好, 而转速较大时实验值小于理论值, 且差异随转速增加

逐渐增大. 本文认为这一差异是大转速下液体的惯性效应导致的, 发现该差异在雷诺数 $Re > 10$ 后随雷诺数单调递增. 此外, 本文对液膜截面形状的变化行为提出了定性解释, 并进一步研究了液膜环数量与各实验变量的关系.

1 理论模型的建立

1.1 椭圆液膜模型

在实验中发现杆外液膜的截面形状大多呈稍有偏心的椭圆形, 如图 1 所示. 因此, 在理论模型中, 可把液膜视为椭圆形, 进而对达到稳态时杆上液体的单位最大载荷量进行求解. 为便于理论求解, 假设流动为小雷诺数流, 暂不考虑液体沿杆轴向及径向的流动, 假设液膜厚度 $h(\theta, t)$ 远小于杆的半径 a .

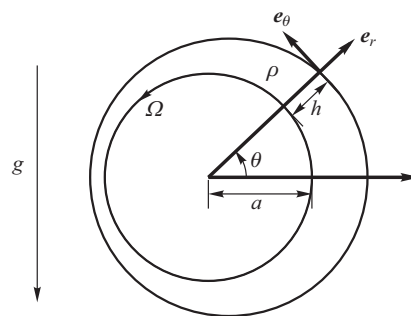


图 1 理论模型示意图

收稿日期: 2023-07-22; 修回日期: 2023-09-05

基金项目: 国家自然科学基金 (1230050468) 资助

作者简介: 林蕴芊 (2003—), 女, 四川成都人, 北京师范大学物理学系 2021 级本科生

通信作者: 马宇翰, E-mail: yhma@bnu.edu.cn

1.2 最大载荷量的求解

液膜厚度 $h(\theta, t)$ 是本文研究的重要参量之一. 当杆上的液体达到稳定后, 平均膜厚可表达为

$$h_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta, t) d\theta \quad (1)$$

在薄膜近似 $h \ll a$ 的条件下, 单位载荷可用平均膜厚表达为

$$W = 2\pi\rho a h_0 \quad (2)$$

其中, ρ 为液体密度, a 为旋转杆的半径. 在一般情况下, 描述流体运动的 Navier-Stokes 方程写为

$$\frac{\rho du}{dt} = \rho f - \nabla p + \mu \nabla^2 u \quad (3)$$

根据雷诺数的定义, 代入实验中的相关参数 (液体密度 $\rho = 0.96 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 杆的转速 $\Omega = 2.46 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 杆半径 $a = 0.01 \text{ m}$, 液体动力黏度 $\mu = 1000 \text{ cSt}$), 得到系统中的最大雷诺数为

$$\text{Re} = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{\rho \Omega a^2}{\mu} \approx 0.2317 \ll 1 \quad (4)$$

此时液体的惯性效应可以忽略, 液体流动近似为斯托克斯流, 方程 (3) 可以简化为

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = g \cos \theta \quad (5)$$

杆上的液体达到稳态时, 边界条件为

$$r = a \text{ 时, } u = \Omega a \quad (6)$$

$$r = a + h(\theta, t) \text{ 时, } \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (7)$$

其中, 式 (6) 表示杆与液体的接触面无相对滑动, 式 (7) 是液体的稳态条件.

文献 [1] 中已给出该定解问题的近似数值解法, 得到杆上液体的单位最大载荷为

$$W = \Gamma \left(\frac{\rho \mu \Omega}{g} \right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} \quad (8)$$

其中 ρ 为液体密度, μ 为液体动力黏度, Ω 为杆转动的角速度, g 为重力加速度, a 为杆的半径. Γ 为数值积分得到的常数, 文献 [1] 给出其值为 $\Gamma = 4.428$, 但本文使用 Matlab 对文献中的数值积分进行了重新计算, 得到 $\Gamma = 4.444$ (精确到三位小数). 考虑到作者完成文献 [1] 时数值计算工具不够成熟、精度受限, 本文在 2.3 中采用 $\Gamma = 4.444$ 来进行实验结果与理论的验证.

2 实验探究

2.1 实验装置

实验装置包括转动杆、测速模块、称重仪器三部

分, 示意图和实物图分别如图 2 和图 3 所示.

本文选用密度与黏度已知的 XIAMETER PMX-200 道康宁二甲基硅油作为实验液体, 其具体参数生产厂家已给出, 如表 1 所示.

表 1 实验中使用的硅油的比重和黏度

比重	黏度/cSt
0.957	10
0.960	50
0.964	100
0.969	350
0.970	500
0.970	1 000

使用 Shapr3D 软件对杆进行建模, 并用白色树脂 3D 打印得到杆. 杆在普菲德 5RK60RGN-CF 型 60W 电机带动下转动, 为使转速达到实验要求, 在电机上加装了普菲德 5GU-20-K 型减速齿轮降低转速. 同时, 使用调速器对电机供电并调节转速. 为测量杆的转速, 在杆上的非液体倾倒区域固定了一个挡光片, 然后使用光电门与 DHTC-1 型多功能微秒计测量杆的转动 10 圈需要的时间, 并计算转动角速度. 此外, 使用 JCS-Z1 型电子秤测量实验过程中滴落的液体质量.

由于杆的质量较大, 随电机转动时最左端的转动中心与圆心稍有偏移, 故选用一个直径等于杆直径的亚克力管作为限位器, 以减弱杆的偏心旋转.

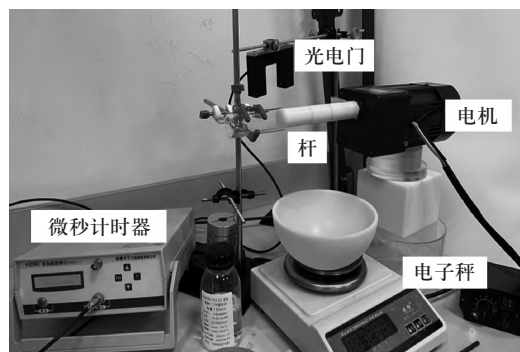
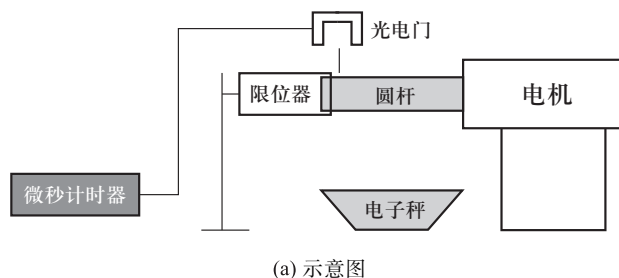


图 2 实验装置图

2.2 实验方法

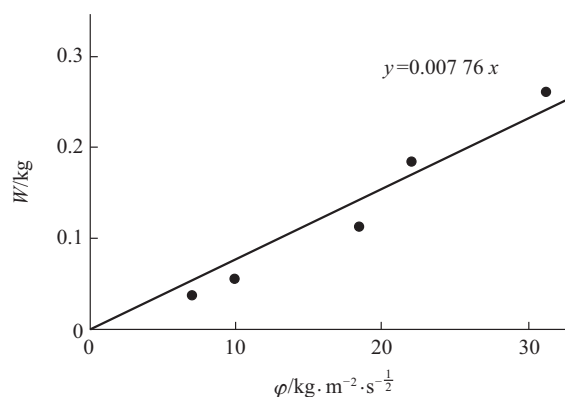
在完成转杆的水平调节,并将电子秤示数归零后,实验步骤如下:1)称量硅油的原始质量 m_0 ;2)打开电机至其稳定,并使用微秒计时器和光电门测量电机转速3次取平均值作为实验值;3)向杆上的一段固定区域倾倒硅油,在杆上的硅油量稳定后,使用小木片尝试少量滴加,直到硅油液膜破损、开始滴落;4)记录下硅油滴落前的电子秤示数 m_1 ;5)测量实验后的硅油剩余质量 m_2 。

为了便于准确读取电子秤示数,使用摄像设备记录其示数变化,在实验结束后通过视频读取硅油滴落前的示数。故实验区域内的最大载荷量为

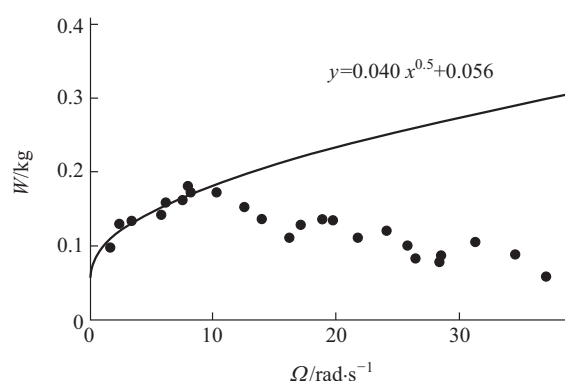
$$m_{\max} = m_0 - m_1 - m_2 \quad (9)$$

2.3 实验结果与分析

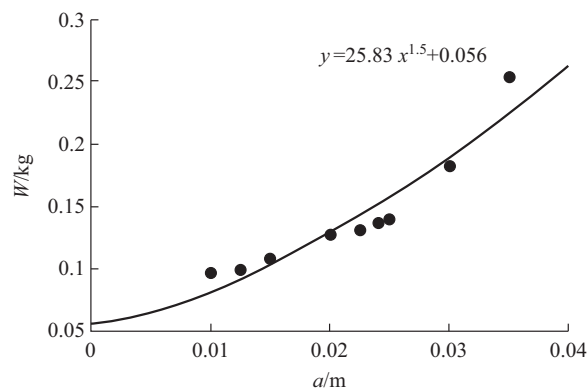
为了验证在1.2中得到的单位最大载荷量 W 与 $\rho^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} \Omega^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$ 成正比的理论关系,实验中通过控制变量、多次测量取平均值的方法得到的单位最大载荷量与各参数的关系。由于实验条件限制,无法单独改变液体的黏度或密度,因此引入了一个复合参数 $\varphi = \sqrt{\rho\mu}$ 来描述液体的性质,通过改变 φ 探究液体性质对实验现象的影响。单位最大载荷量 W 与液体性质 φ 、杆旋转角速度 Ω 、杆半径 a 关系的实验结果分别如图3(a)-(c)所示。



(a) W 与 φ 的关系



(b) W 与 Ω 的关系



(c) W 与 a 的关系

图3 单位最大载荷与各参数的关系

其中,实心点为实验数据点,曲线为使用式(8)得到的理论拟合线。可以看出,在杆角速度较小 ($\Omega \leq 10 \text{ rad/s}$) 时,单位最大载荷量 W 与 φ 、 $\Omega^{\frac{1}{2}}$ 、 $a^{\frac{3}{2}}$ 均成正比,且实验与理论拟合的相关性系数 $R^2 > 0.9$,这说明 Moffat 得到的最大载荷表达式(8)在雷诺数较小的情况下是成立的。

从图3(b)中也可以发现,转速 $\Omega > 10 \text{ rad/s}$ 时实验值普遍小于理论值。接下来将对这个偏差进行讨论和解释。

2.3 对偏差的讨论

Moffat 的理论模型^[1]是在液体雷诺数 $Re \ll 1$ 的假设上建立的,但该假设的合理性尚未得到证明。本文猜想2.2中理论值与实验值的偏差就是由于在较高旋转角速度 Ω 下,液体雷诺数不再满足 $Re \ll 1$ 的理论假设而导致的。为了验证这个猜想,笔者计算了单位最大载荷量 W 的理论值与实验值的偏差和对应实验中液体的雷诺数,将两者绘制为图像,如图4所示。

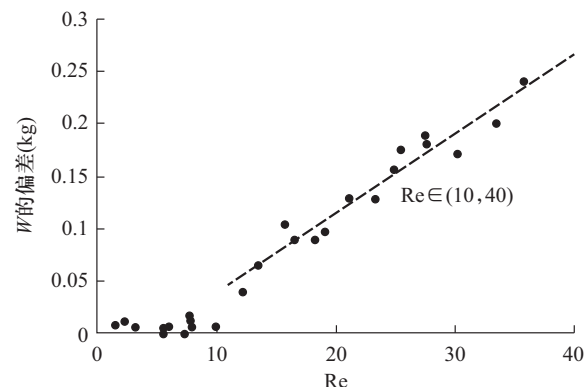


图4 W 的理论值与实验值偏差大小与雷诺数 Re 的关系

可以看出,在 $Re > 10$ 时,偏差值与雷诺数成正相

关. 雷诺数越小,黏性力越显著;雷诺数越大,则惯性效应越显著. 因此,可以对偏差的产生做出解释:随着转速增大,雷诺数增大,惯性效应无法忽略,理论假设中的小雷诺数流假设不再成立. 除此以外,随着杆转速的增大,外界的扰动(如杆的偏心运动、外界气流扰动等)也会增大,使液膜不稳定,降低载荷量.

3 液膜行为的探究

3.1 探究液膜形状的变化过程

在实验中,还发现随着转速和滴加硅油量的增加,液膜的形状会发生变化. 为探究这一变化过程,将图2的实验装置改装为图5所示装置进行实验,以便从垂直方向记录液膜的具体形状.

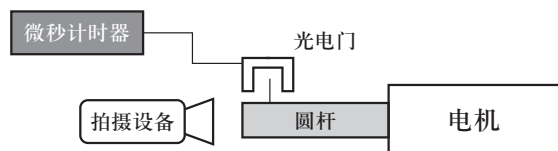
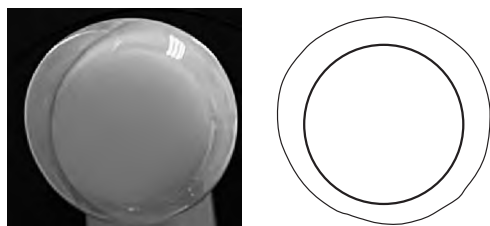


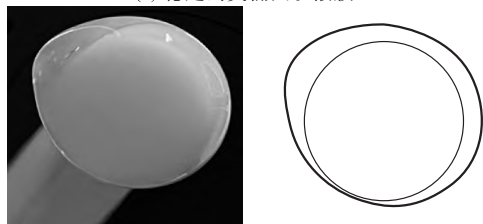
图5 更改后的实验装置图(俯视)

通过拍摄视频对液膜截面形状进行分析,可以将液膜变化分为5个阶段:1)稳定的类椭圆状液膜;2)通过转速增大或少量滴加硅油的方法,液膜周长会增大,形成叶状液膜;3)转速继续增大,在离心力的作用下,一部分液体会甩出形成液滴,即单勾状液膜;4)转速进一步增大,惯性效应增强,更多的液体甩出,形成多勾液膜;5)转速持续增大,液膜发生破裂,导致硅油滴落,恢复到类椭圆状液膜.

图6展示了四个不同阶段的液膜形状,左侧为视频截图,为清晰展示液膜形状,使用图像处理工具将液膜曲线处理为右侧图像.



(a) 稳定的类椭圆状液膜



(b) 叶状液膜



(c) 单勾液膜



(d) 多勾液膜

图6 不同阶段的液膜截面图

3.2 探究液体环数量的变化

除了液膜截面形状的变化,在实验中还发现了液环现象的产生. 如图7所示.

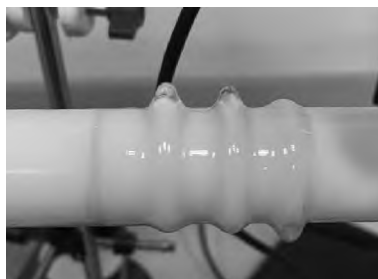
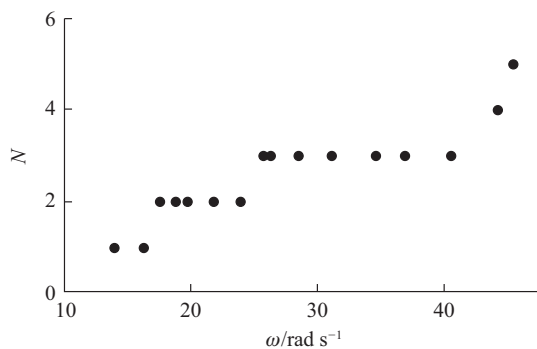


图7 液环现象

这是液膜截面形状变化在杆轴向上的体现. 虽然无法给出该现象的定量解释,但本文从实验上探究了相同长度范围内液环数量与转速、杆半径的关系,实验结果如图8所示.



(a) 液环数量与转速 ω 的关系

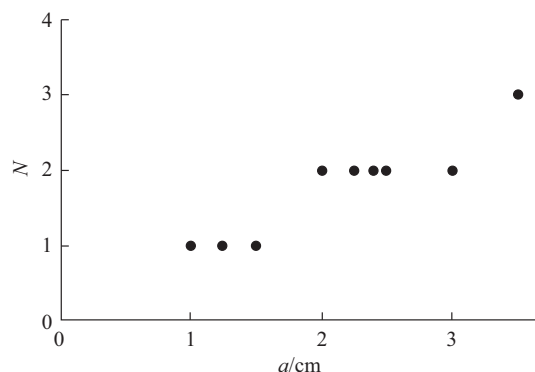
(b) 液环数量与杆半径 a 的关系

图8 液环数量与不同参数的关系

可以看出,相同长度范围内液环的数量与杆的转速、半径成正相关. 由于液环数量需要为整数,所以能看到明显的阶段性变化.

4 总结与讨论

本文在1977年Moffat研究的基础上,通过严谨的控制变量实验在低雷诺数范围内检验了Moffat理论的正确性,即在一定范围内,单位最大载荷量 W 与 φ 、 $\Omega^{\frac{1}{2}}$ 、 $a^{\frac{3}{2}}$ 均成正比. 在此基础上,本文分析了在雷诺数较大区域,惯性效应导致实验值与理论值偏差随雷诺数的增大而增加.

The motion of viscous liquid film coating on a horizontal rotating cylinder

LIN Yun-qian, LEI Jia-rui, MA Yu-han

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: In this paper, the motion of viscous liquid outside a rotating cylindrical rod is studied. By conducting controlling variable experiments, Moffat's theoretical formula is verified to some extent. It is proposed that the inertial effect at a relatively high Reynolds number (>10) causes the difference between theoretical and experimental results. The periodic changes in cross-sectional shape of liquid film with respect to angular velocity is further studied, and images of the shape of liquid film at different angular velocities are obtained. Meanwhile, the phenomenon of forming liquid rings along the axial direction of cylindrical rod is quantitatively studied, and the relationship between the number of rings and several factors is given.

Key words: viscous liquid; fluid film; Reynolds number

(上接49页)

different methods of calculating conjugate momentum of Jacobi coordinates. These contents can be a useful supplement to the classroom teaching of theoretical mechanics and celestial mechanics.

Key words: Hamilton; canonical coordinate; canonical coordinate transformation; Jacobi coordinate

此外,本文进一步在实验中探究了液膜截面形状变化的问题. 将变化过程分为了5个阶段,并得到了四个不同时期的截面图像. 液膜截面形状变化在轴向上的体现是液环的出现. 经过控制变量实验发现,液环数量与杆转速、半径成正相关.

本文的研究对工程学中轴承上的润滑油分布有启发性. 同时,单位最大载荷量与转速的关系对如何优化蜂蜜棒结构也有指导意义.

参考文献:

- [1] Moffatt H K. Behaviour of a viscous film on the outer surface of a rotating cylinder [J]. *Journal de mécanique*, 1977, 16(5): 651-673.
- [2] Hansen E B, Kelmanson M A. Steady, viscous, free-surface flow on a rotating cylinder [J]. *Journal of Fluid mechanics*, 1994, 272: 91-108.
- [3] Peterson R C, Jimack P K, Kelmanson M A. On the stability of viscous free-surface flow supported by a rotating cylinder [J]. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2001, 457(2100): 1427-1445.
- [4] Oron A, Davis S H, Bankoff S G. Long-scale evolution of thin liquid films [J]. *Reviews of modern physics*, 1997, 69(3): 931.